

**Заочный тур регионального этапа
Российской олимпиады по математике 2009-10 учебного года**

7 класс

Время выполнения заданий – 4 часа (240 минут)

1. Из города А в город В выехал всадник со скоростью 10 км/ч. Через 45 минут после этого вслед за ним выехал велосипедист и ехал со скоростью 12 км/ч. В город В велосипедист и всадник приехали одновременно. Найдите расстояние между городами.
2. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размером 11x15 клеток (11 строк и 15 столбцов), стороны которого идут по линиям сетки. Некоторые клетки прямоугольника оставлены белыми, а остальные выкрашены в черный цвет, причем в каждой из 11 строк белых клеток больше, чем черных. Верно ли, что хотя бы в одном столбце белых клеток тоже больше?
3. Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки — пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников? (Двушка – две копейки, гривенник – десять копеек.)
4. Саша решил за 4 дня 23 задачи. В каждый следующий день он решал больше задач, чем в предыдущий, и в четвертый день решил вчетверо больше, чем в первый. Сколько задач решил Саша в каждый из этих четырех дней?
5. Поселок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы — квадраты со стороной 100 метров, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и заканчивает свой путь в угловой точке А? (Стороны квадрата — тоже улицы.)

**Заочный тур регионального этапа
Российской олимпиады по математике 2009-10 учебного года**

8 класс

Время выполнения заданий – 4 часа (240 минут)

1. Коля и Вася за декабрь получили по 20 оценок, причем Коля получил пятерок столько же, сколько Вася четверок, четверок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася — пятерок. При этом средний балл за декабрь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?
2. Известно, что $a+b+c=0$. Докажите, что $ab+bc+ca \leq 0$.
3. Имеется два трехлитровых сосуда. В одном — 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полупроцентный раствор в том сосуде, в котором первоначально была вода?
4. В параллелограмме проведены биссектрисы углов между диагоналями. Докажите, что точки пересечения биссектрис со сторонами параллелограмма являются вершинами ромба.
5. Было 17 чугунных чушек весом в 5, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 27, 29, 30, 33, 35 кг. Сначала увезли некоторое количество чушек, затем увезли еще несколько чушек, вместе весивших втрое больше, чем было вывезено в первый раз. В третий раз вывезли чушки, весившие вместе в пять раз больше, чем в первый раз. После этого осталась одна чушка. Сколько она весит?

**Заочный тур регионального этапа
Российской олимпиады по математике 2009-10 учебного года**

9 класс

Время выполнения заданий – 4 часа (240 минут)

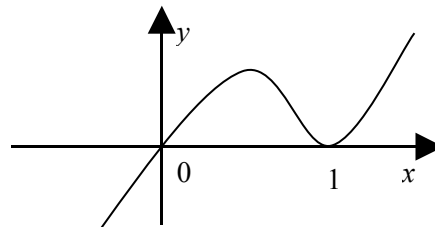
1. Клиент банка забыл трехзначный шифр своего сейфа и помнил лишь, что этот шифр простое число, а произведение его цифр равно 16. Замок сейфа автоматически блокируется, если шифр дважды набран неверно. Удается ли клиенту открыть сейф?
2. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает продолжение стороны AC в точке R . Докажите, что $BQ = AR$.
3. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ по модулю не меньше $\frac{1}{2}$.
4. Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причем доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?
5. Решите в целых числах уравнение: $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) = 650$.

**Заочный тур регионального этапа
Российской олимпиады по математике 2009-10 учебного года
10 класс**

Время выполнения заданий – 4 часа (240 минут)

1. Докажите неравенство $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$.

2. График функции $y(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в начале координат и касается ее в точке $(1, 0)$ – см. чертеж. Найдите a, b, c .



3. В четырехугольник $ABCD$ вписан полукруг, центр которого O совпадает с серединой стороны AD . Найдите AD , если $AB = a$, $CD = b$.

4. Можно ли так расставить числа от 1 до 101 в клетки таблицы 101×101 , чтобы в каждой строке, в каждом столбце и на обеих главных диагоналях встречались все числа от 1 до 101?

5. По кольцевой линии в одну сторону ходят 10 трамваев. Трамвай проходит кольцо полностью ровно за 1 час. В течение любых 13 минут через остановку проходят как минимум 2 трамвая. В течение минуты до прихода Пети на остановку с нее ушло 2 трамвая. Докажите, что Пете придется ждать следующего трамвая более 5 минут.

**Заочный тур регионального этапа
Российской олимпиады по математике 2009-10 учебного года
11 класс**

Время выполнения заданий – 4 часа (240 минут)

1. Докажите, что если $(a+b+c)c < 0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительный корень.
2. Можно ли число 2010 представить в виде суммы шести квадратов нечетных чисел?
3. Найдите при каком натуральном k величина $k^2/1,001^k$ достигает наибольшего значения?
4. Через вершины А и В треугольника ABC проведены две прямые, которые разбивают треугольник на четыре фигуры (три треугольника и один четырехугольник). Известно, что три из этих фигур имеют одинаковые площади. Докажите, что четырехугольник среди них.
5. Можно ли ряд натуральных чисел разбить на два множества так, чтобы ни одно из них не содержало никакой арифметической прогрессии, состоящей из бесконечного числа членов?